

$\frac{2(1-y)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4y^2+5}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$, 当 $y=0$ 时, 取得最大值.

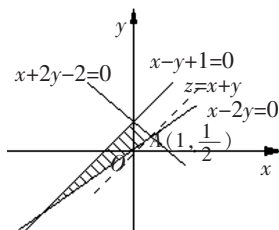
六、构建解析几何中的斜率、截距、距离等模型研究最值问题

例 8. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1 \geq 0, \\ x-2y \leq 0, \\ x+2y-2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大

值为 _____.

【解析】作出不等式组满足的平面区域, 如图所示, 由图知, 当目标函数 $z=x+y$ 经过点 $A(1, \frac{1}{2})$ 时取得最大值,

即 $z_{\max} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.



七、构建方程模型, 求根的个数

例 9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1-|x+1|, & x < 1 \\ x^2-4x+2, & x \geq 1 \end{cases}$ 则函数 $g(x) = 2^{|f(x)|} - 2$ 的零点个数为 _____ 个.

【解析】 $g(x) = 2^{|f(x)|} - 2$ 的零点个数, 即是方程 $f(x) = \frac{2}{2^{|f(x)|}}$ 的根的个数, 也就是 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{2}{2^{|f(x)|}}$ 的图像的交点个数, 分别作出 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{2}{2^{|f(x)|}}$ 的图像, 如图所示, 由图像知 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{2}{2^{|f(x)|}}$ 的图像有两个交点, 所以函数 $g(x)$ 有 2 个零点.

八、研究图形的形状、位置关系、性质等

例 10. 已知 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 则函数 $f(x) = x^2 \log b + 2x \log a + 8$ 的图像恒在 x 轴上方的概率为 ()

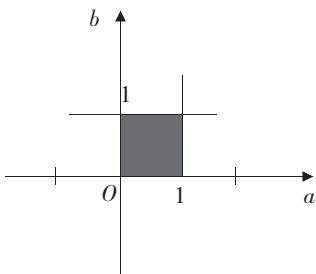
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

【解析】因为函数 $f(x)$ 的图像恒在 x 轴上方, 则 $4(\log a)^2 - 32 \log b < 0$. 因为 $0 < a < 1, 0 < b < 1$, 所以 $\log a > 0, \log b > 0$, 所以 $(\log b)^3 > \frac{1}{8}$, 所以 $\log b > \frac{1}{2}$, 所以 $b < a^{\frac{1}{2}}$. 如图建立 a, b 的直角

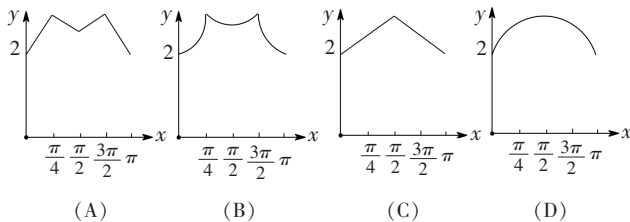
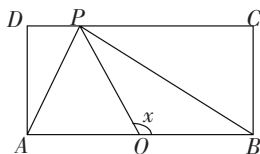
坐标系, 如图所示, 图中阴影部分的面积即为满足条件 a, b 的范围. 因为 $S_{\text{阴}} = \int_0^1 a^{-\frac{1}{2}} da = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$, 所

以所求概率 $P = \frac{\frac{2}{3}}{1 \times 1} = \frac{2}{3}$,

故选 C.



例 11. 如图, 长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2, BC=1, O$ 是 AB 的中点, 点 P 沿着边 BC, CD 与 DA 运动, 记 $\angle BOP=x$. 将动 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图像大致为 ()



【解析】由已知, 得当点 P 在 BC 边上运动时, 即 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $PA+PB = \sqrt{\tan^2 x + 4} + \tan x$; 当点 P 在 CD 边上运动时, 即 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ 时, $PA+PB = \sqrt{(\frac{1}{\tan x} - 1)^2 + 1} + \sqrt{(\frac{1}{\tan x} + 1)^2 + 1}$, 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $PA+PB = 2\sqrt{2}$; 当点 P 在 AD 边上运动时, 即 $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi$ 时, $PA+PB = \sqrt{\tan^2 x + 4} - \tan x$, 从点 P 的运动过程可以看出, 轨迹关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 且 $f(\frac{\pi}{4}) > f(\frac{\pi}{2})$, 且轨迹非线型, 故选 B.

总的来说“数形结合法”是解决许多数学问题的重要方法, 它可以将抽象数学问题具体化、准确化、形象化. 用好数形结合可以使我们的理解更深入、更准确地理解数学问题.

1. 在数学中函数的图像、方程的曲线、不等式所表示的平面区域、向量的几何意义、复数的几何意义等都实现以形助数的途径, 当试题中涉及这些问题的数量关系时, 我们可以通过图形分析这些数量关系, 达到解题的目的.

2. 有些图形问题, 单纯从图形上无法看出问题的结论, 这就要对图形进行数量上的分析, 通过数的帮助达到解题的目的.

3. 利用数形结合解题, 有时只需把图像大致形状画出来即可, 不需要画出精确图像.

4. 数形结合法是解决高考数学试题的一种常用方法与技巧, 特别是在解选择题、填空题时更方便, 可以提高解题速度.

责任编辑 徐国坚